Historyczne źródła niepewności pomiaru

Problematykę niepewności pomiaru można wiązać z pojawieniem się Przewodnika, podstawowego dokumentu dotyczącego jej wyrażania, wydanego w roku 1993 i 1995 (Guide to the expression of uncertainty in measurement). Oba wydania praktycznie nie różnią się od siebie, poza kosmetycznymi zmianami redakcyjnymi. Dodatkowo tekst edycji z 1995 roku został upubliczniony w 2008 roku na stronach internetowych Międzynarodowego Biura Miar w postaci dokumentu JCGM 100:2008. Pracę nad tym dokumentem prowadzono od 1977 roku. Opublikowanie dzieła poprzedzały opracowania wydawane przez krajowe instytucje metrologiczne. Jednym z takich opracowań był materiał wydany w 1980 roku przez National Bureau of Standards w USA pt. „NBS communication manual for scientific, technical and public information". Przedstawia on ogólną filozofię obliczania niepewności przedstawioną później w Przewodniku.

Obecnie trwają intensywne prace nad wypracowaniem uniwersalnej metodyki opracowania danych pomiarowych zgodnie z założeniami teorii niepewności mogącej mieć zastosowanie w każdej dziedzinie nauk przyrodniczych i technicznych. Kanon ten opracowywany jest w postaci pakietu dokumentów pod wspólnym tytułem „Evaluation of Measurement Data" przez Komitet Wspólny ds. Przewodników w Metrologii (Joint Committee for Guides in Metrology) pod przewodnictwem Międzynarodowego Biura Miar.

Powstaje pytanie, gdzie należałoby szukać początków kształtowania się współczesnej myśli w dziedzinie opracowania danych pomiarowych. Początki te historycznie można wiązać z trzema intelektualnymi osiągnięciami myśli matematycznej. Wszystkie pojawiły się prawie w tym samym czasie za sprawą trzech wybitnych intelektualistów z przełomu XVIII i XIX wieku.

Adrien Marie Legendre (1752 – 1833), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) i Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) za sprawą swoich publikacji stworzyli podstawy współczesnej metodyki opracowania danych pomiarowych. Przedstawili w nich trzy podstawowe rozwiązania, które współcześnie znane są pod nazwami: metoda najmniejszych kwadratów, prawo propagacji błędu oraz centralne twierdzenia graniczne. Przedstawione zostały, niejako na marginesie zasadniczych publikacji, kolejno w latach 1805, 1809 i 1810. Prace te nie tworzą oddzielnych dzieł, lecz raczej są uzupełnieniami szerszych opracowań.

Legendre w dziele pt. „Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes", które ukazało się w 1805 roku zamieszcza kilkustronicowy dodatek „Sur la methode des moindres quarres". Przedstawia w nim metodę minimalizacji sumy kwadratów błędów. Jeżeli przedstawimy równanie wielkości mierzonej w postaci liniowej to możemy zapisać szereg równań błędu tej wielkości

$$E_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z + \dots$$

gdzie a_i, b_i, c_i, … są znanymi współczynnikami, zaś x, y, z, … są nieznanymi wielkościami wejściowymi. Zmienne równania można wyznaczyć podnosząc do kwadratu błędy i sumując je tak, aby wyznaczały najmniejszą z możliwych wartości. Współcześnie metoda ta stosowana jest w analizie regresji.

Kolejne rozwiązanie przynosi praca Gaussa z 1809 roku pt. „Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solum Ambientium". Autor przedstawia podobnie wyglądający liniowy układ równań

$$V_i = a_i x + b_i y + c_i z + \dots$$

i formułuje błąd jako różnicę pomiędzy obliczoną wartością V_i a zaobserwowaną M_i

$$\Delta_i = V_i - M_i$$

Prawdopodobieństwo błędu charakteryzuje krzywą $\varphi(\Delta_i)$, która jest symetryczna i osiąga maksimum dla $\Delta_i = 0$. Przyjmuje aksjomat, że najbardziej prawdopodobną wartością pojedynczej, nieznanej obserwacji jest średnia arytmetyczna zbioru danych, uzyskanego w tych samych warunkach pomiarowych podczas wielokrotnego powtarzania obserwacji. Postuluje, do opisu krzywej (rozkładu) błędu, przyjęcie funkcji

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}$$

gdzie h jest stałą związaną z precyzją pomiaru. Jako ciekawostkę można dodać, że w oryginalnym zapisie dzieła znajduje się wzór bez nawiasów i znaku potęgowego

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta}$$

Powyższy zapis to postać funkcji gęstości rozkładu normalnego (krzywej dzwonowej).

Znajdujemy w powyższym dziele również zapis równań błędu, podobny do zapisu różniczki zupełnej, w postaci sumy składowych poprzedzonych pochodnymi cząstkowymi. Jest to pierwotny zapis prawa propagacji błędu.

W 1810 roku Laplace w swoim „Supplement au memoire" formułuje tezę, że jeżeli błąd każdej obserwacji jest taki sam, to prawdopodobieństwo, iż błąd średniej n obserwacji będzie zawarty w granicach $\pm rh/n$, jest równe

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{k}{2k'}} \int \exp\left[-\frac{k}{2k'} r^2\right] \mathrm{d}r$$

gdzie h jest długością przedziału, wewnątrz którego zawarty jest błąd pojedynczej obserwacji. Prawdopodobieństwo błędu zawartego w granicach od x = -h/2 do x = h/2 autor oznacza $\varphi(x/h)$ oraz definiuje, że

$$k = \int \phi\left(\frac{x}{h}\right) \mathrm{d}x \,, \; k' = \int \frac{x^2}{h^2} \phi\left(\frac{x}{h}\right) \mathrm{d}x$$

Jako ciekawostkę można dodać, że w oryginale znajdujemy zapis powyższego wzoru całkowego w postaci (odwrócenie zapisu funkcji podcałkowej i użycie litery c do oznaczenia liczby e)

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{k}{2k'}} \cdot \int dr \cdot c^{-\frac{k}{2k'} r^2}$$

W ten sposób pojawia się teza jednego z podstawowych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa, a mianowicie centralnego twierdzenia granicznego.

Należy też dodać, że Laplace jeszcze w latach siedemdziesiątych XVIII stulecia formułuje trzy warunki dotyczące krzywej (rozkładu) błędu: ma być symetryczna względem wartości prawdziwej, gdyż obserwacje jednakowo odchylają się od niej w kierunku wartości większych i mniejszych; musi zdążać do zera oddalając się od wartości prawdziwej, gdyż prawdopodobieństwo, że wartość obserwacji może być nieskończenie różna od wartości prawdziwej jest równe zeru; obszar (pole powierzchni pod krzywą błędu) musi liczbowo być równy jeden, gdyż pewne jest zdarzenie, że każda obserwacja zawarta jest pod tą krzywą. Takie kryteria spełnia oczywiście krzywa rozkładu normalnego, ale propozycję jej zastosowania do opisu rozkładu błędu pomiaru przedstawił dopiero Gauss (Laplace początkowo uważał, że takie kryteria może spełnić wiele funkcji, m.in. funkcja logarytmiczna, $e(x) = (1/2a) \cdot \log(a/|x|)$, gdzie a wyznacza granicę przedziału błędu e).

Rozkład normalny jest jednym z podstawowych rozkładów rachunku prawdopodobieństwa, a ze względu na powyższe okoliczności nosi również nazwę rozkładu Laplace'a-Gaussa. Stał się on podstawą oceny wyniku pomiaru i jest jednym z założeń wykorzystywanych w teorii niepewności. Teoria ta bowiem zakłada, że każda obserwacja wywodzi się z populacji o rozkładzie normalnym. To oczywiście nie oznacza, że rozkład związany z wielkością mierzoną jest normalny. Ten należy dopiero wyznaczyć stosując metodę propagacji rozkładów wielkości wejściowych na podstawie modelu matematycznego wielkości wyjściowej.

Trzy wymienione powyżej historyczne rozwiązania tworzą podstawy współczesnej metrologii teoretycznej w dziedzinie opracowania wyniku pomiaru. Powstały one na wiele lat przed ich praktycznym zastosowaniem i, choć zostały przyjęte bez naukowego dowodzenia, świadczą o trafności wnioskowania. Powstały prawie w tym samym czasie, niezależnie w umysłach ich twórców, gdyż obieg informacji naukowej w początkach XIX wieku był bardzo ograniczony. Można sądzić, że autorzy rozwiązań, choć stworzyli nierozerwalny łańcuch wnioskowań (centralne twierdzenie graniczne wymaga przyjęcia założenia o rozkładzie normalnym, a ten umożliwia rozwiązanie problemu propagacji błędu, która nie może się obejść bez metody najmniejszych kwadratów), to prawdopodobnie nie znali swoich prac. Ten krótki czas pomiędzy rokiem 1805 i 1810 zbudował podstawy niepewności pomiaru. Miało to miejsce w dobie romantyzmu, która to aksjologicznie w nauce kojarzy się, nie bez przyczyny, z genialną intuicją.

Paweł Fotowicz
GUM