

# Analiza niepewności pomiaru zmienności długości płytek wzorcowych z wykorzystaniem analitycznych i numerycznych metod obliczeniowych

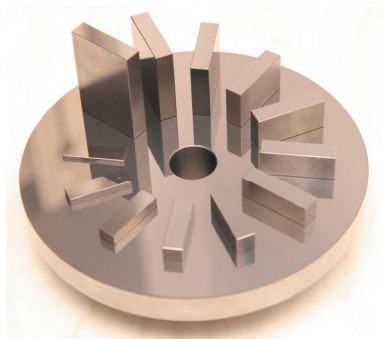
Bartosz Barzdajn

## 1. Wprowadzenie

Płytki wzorcowe to jeden z najstarszych wzorców jednostki miary długości pozwalający na wykonywanie precyzyjnych wzorcowań. Od momentu ich wynalezienia są jednym z podstawowych narzędzi zapewniających spójność pomiarową dla przemysłu.

Pod koniec XIX wieku w pełni rozkwitła rewolucja przemysłowa, a koncepcja zamiennych, standaryzowanych części stała się powszechna. Piętą Achillesową tego systemu była konieczność utrzymywania bardzo dużej ilości wzorców niezbędnych w procesie kontroli produkcji. Liczba używanych wzorców i wysiłek jaki trzeba było włożyć w ich utrzymanie stawał się dużym obciążeniem dla producentów. Przełomem okazał się wynalazek szwedzkiego inżyniera C.E. Johannsona. Jego koncepcja, po raz pierwszy sformułowana w 1896 roku, polegała na wykorzystaniu małych zestawów stalowych płytek wzorcowych, które mogą być połączone ze sobą tworząc nowe wzorce. Na przykład cztery płytki wzorcowe o długościach nominalnych 1 mm, 2 mm, 4 mm, 8 mm mogą posłużyć do stworzenia dowolnych wzorców milimetrowych w zakresie od 1 mm do 15 mm. Johnson zauważył, że dwie stalowe powierzchnie, odpowiednio wykończone, płaskie i równoległe mogą zostać do siebie przywarte (połączone oddziaływaniami adhezyjnymi) z użyciem bardzo niewielkiej ilości smaru łączącego te powierzchnie. Grubość warstwy przywarcia wynosi wtedy około 25 nm, co było bardzo niewielką wartością jak na ówczesnie wymaganą dokładności pomiarów. Ewentualnie można było uwzględnić grubość warstwy przywarcia w wyznaczaniu wzorcowej długości [1].

Definicja płytki wzorcowej według normy PN-EN ISO 3650 jest następująca: „wzorzec miary o przekroju prostokątnym, wykonany z materiału odpornego na zużycie, z jedną parą płaskich wzajemnie równoległych powierzchni pomiarowych, które można przywierać do powierzchni pomiarowych innych płytek wzorcowych tworząc stosy płytek lub do podobnie wykończonych powierzchni płytek pomocniczych przy pomiarach długości”. Na rys. 1

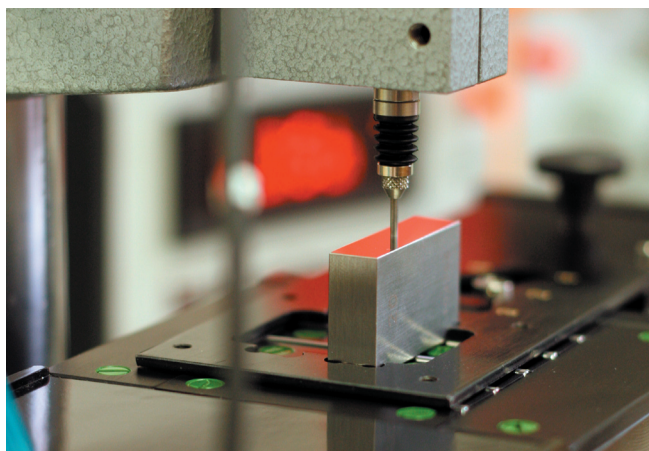


Rys. 1. Stalowe płytki wzorcowe przywarte do stolika pomiarowego

przedstawiono stalowe płytki wzorcowe przywarte do stolika pomiarowego wykonanego z tego samego materiału i pełniące rolę płytki pomocniczej w interferencyjnych pomiarach długości.

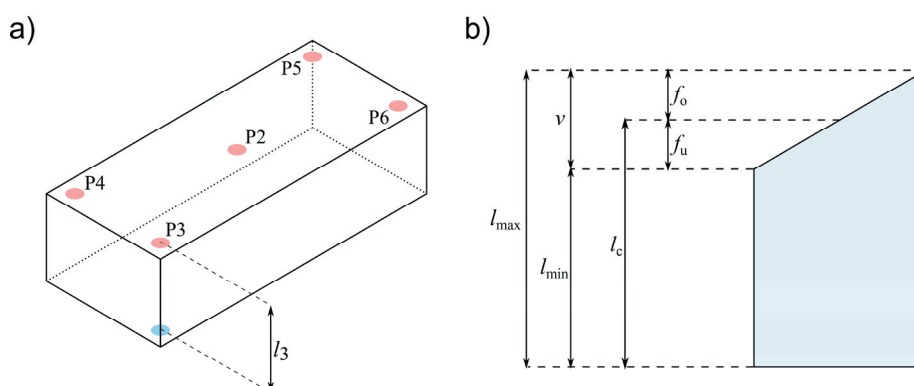
## 2. Zmienność długości

Zmienność długości  $v$  jest jednym z parametrów charakteryzujących płytkę wzorcową i decydującym o jej wartości jako wzorca. Zgodnie z normą PN-EN ISO 3650 jest to różnica między największą  $l_{\max}$  a najmniejszą  $l_{\min}$  długością płytki wzorcowej w dowolnym punkcie powierzchni pomiarowej płytki. Pomiary zmienności długości mogą być wykonywane metodami porównawczymi, na przykład na komparatorze dwuczujnikowym. Na rys. 2 przedstawiono zdjęcie układu płytka – komparator przygotowanego do pomiarów zmienności długości.



Rys. 2. Komparator dwuczujnikowy przygotowany do pomiarów zmienności długości

Różnice wskazań czujnika komparatora w środku i w czterech narożach powierzchni pomiarowej płytki wzorcowej (w odległości około 1,5 mm od powierzchni bocznych) mogą być uznane za reprezentatywne do wyznaczania zmienności długości. Rozmieszczenie punktów pomiarowych oraz definicje najważniejszych parametrów płytki wzorcowej przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. a) Umieszczenie punktów pomiarowych na płytce wzorcowej oraz sposób wyznaczenia długości płytki wzorcowej w danym punkcie pomiarowym (np. długości  $l_3$  w punkcie P3). b) Długość środkowa  $l_c$  odchylenia  $f_o$  i  $f_u$ , zmienność długości  $v$ , największa długość  $l_{\max}$ , najmniejsza długość  $l_{\min}$

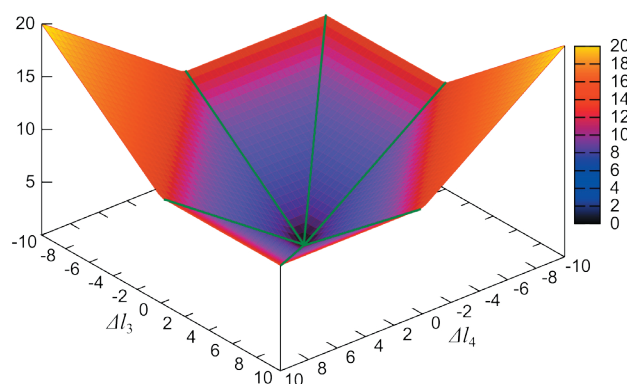
### 3. Model pomiaru zmienności długości

Równanie pomiaru zmienności długości można wyrazić następująco

$$v = \max(l_2, l_3, l_4, l_5, l_6) - \min(l_2, l_3, l_4, l_5, l_6) \quad (1)$$

gdzie  $v$  oznacza zmienność długości, natomiast  $l_{2...6}$  to długości płytki wzorcowej wyznaczone odpowiednio w punktach P2, P3, P4, P5, P6 (rys. 3a). Ponieważ na równanie pomiaru składają się funkcje max i min, dla niektórych wartości argumentów pochodne cząstkowe funkcji  $v$  będą nieokreślone. Na przykład przy założeniu, że poszczególne długości mierzone są względem punktu P2 ( $\Delta l_{3...6} = l_{3...6} - l_2$ ) oraz, że  $\Delta l_5 = 0$ ,  $\Delta l_6 = 0$ , to pochodne cząstkowe funkcji  $v$  będą nieokreślone jeżeli długości  $\Delta l_3$  i  $\Delta l_4$  będą sobie równe lub równe zero (rys. 4). W związku z powyższym, nie można szacować niepewności pomiaru zmienności długości metodą propagacji niepewności.

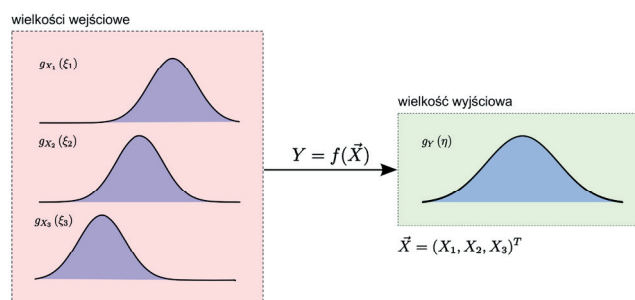
Problematyka powyższa została podjęta między innymi przez dr Michaela Matusa z BEV (Austria) podczas warsztatów towarzyszących posiedzeniu TC-L EURAMET w 2008 roku, a następnie w postaci referatu na konferencji MacroScale 2011. Zaproponowanym wtedy rozwiązaniem było użycie metody Monte Carlo, zgodnie z algorytmem przedstawionym w dokumencie JCGM 101 [2].



Rys. 4. Wykres zmienności długości  $v$  w funkcji długości  $\Delta l_3$  i  $\Delta l_4$  przy założeniu, że  $\Delta l_5 = \Delta l_6 = 0$

### 4. Metoda Monte Carlo

Wykorzystanie metody Monte Carlo do analizy niepewności pomiaru opiera się na zasadzie propagacji rozkładów, zilustrowanej na rys. 5.



Rys. 5. Propagacja rozkładów

Przykładowo, niech dane będzie równanie opisujące model pomiaru pośredniego

$$y = f(x_1, x_2, x_3) \quad (2)$$

gdzie  $x_1, x_2, x_3$  reprezentują wartości wielkości wejściowych, wyznaczone w pomiarach bezpośrednich. Niech  $Y$  oznacza zmienną losową o nieznanym rozkładzie, która przyjmuje wartości  $y$  z określonym prawdopodobieństwem. Zmienne losowe  $X_1, X_2, X_3$  będą zdefiniowane tak, aby odpowiadały zbiorom wielkości wejściowych. Wszystkie wymagane w analizie niepewności estymaty można wyznaczyć analizując rozkład prawdopodobieństwa  $Y$ , który można wyznaczyć, jeżeli znane są rozkłady wielkości wejściowych  $X_1, X_2, X_3$ . Metoda Monte Carlo polega na losowaniu elementów ze zbiorów liczbowych reprezentujących zmienne  $X_1, X_2, X_3$ . Poprzez równanie pomiaru obliczane są wartości wielkości wyjściowej. Rezultatem jest zbiór wartości o rozkładzie zbliżonym do rozkładu zmiennej losowej  $Y$ . Analizując go można oszacować wszystkie, interesujące z punktu widzenia analizy niepewności, parametry rozkładu (np. wartość oczekiwana, wariancja) oraz kwantyle (górną i dolną granicę przedziału rozszerzenia). Najefektywniejszym sposobem przeprowadzenia analizy statystycznej badanej wielkości jest wyznaczenie jej dystrybuanty. Dystrybantę  $F(y)$ , zmiennej losowej  $Y$ , która zdefiniowana przez zależność

$$F(y) = P(Y < y) \quad (3)$$

można przybliżyć za pomocą dystrybuanty numerycznej z wygenerowanego zbioru wielkości wyjściowych. Przyjmując, że  $N$  to liczebność próby, dystrybantę numeryczną można opisać równaniem

$$\hat{F}(y) = \frac{\text{liczba } y_i \text{ mniejszych od } y}{\text{liczba wszystkich } y_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{\{y_i < y\}} \quad (4)$$

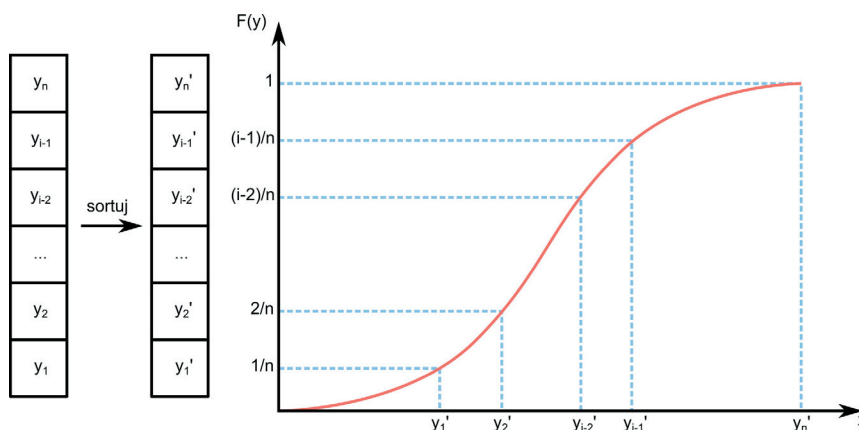
gdzie  $1_{\{y_i < y\}}$  to funkcja charakterystyczna zbioru  $y_i$  mniejszych od  $y$

$$1_{\{y_i < y\}} = \begin{cases} 1, & \text{dla } y_i \leq y \\ 0, & \text{dla } y_i > y \end{cases} \quad (5)$$

Na podstawie prawa wielkich liczb

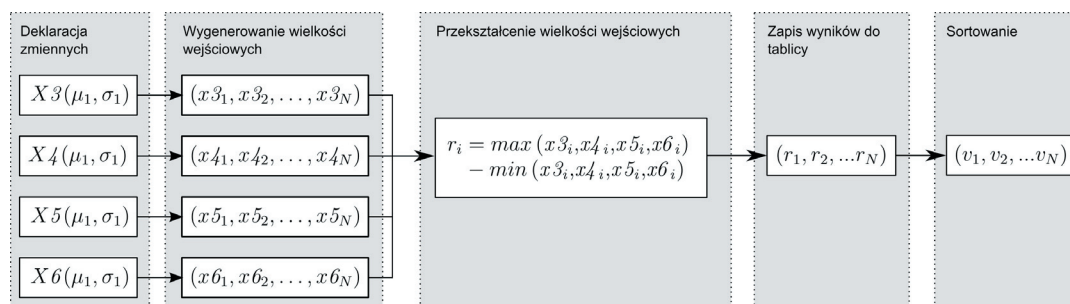
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{F}_N(y) = F(y) \quad (6)$$

sprawdzając po kolei każdą wylosowaną wartość pod kątem, ile ze wszystkich pozostałych wylosowanych wartości jest od niej mniejszych, szacuje się wartość dystrybuanty w punktach odpowiadających sprawdzanej wartości. W praktyce realizuje się to poprzez sortowanie niemalejąco tablicy przechowującej wszystkie elementy próby. Wartość znajdującą się w  $n$ -tej komórce posortowanej tablicy jest większa lub równa od  $n$  pozostałych z próby, a zatem w przybliżeniu dystrybuanta w tym punkcie wynosi  $n/N$ . Jeszcze lepsze oszacowanie wartości w danym punkcie można uzyskać uwzględniając parzystość liczby próbek. Podsumowując, uporządkowane wartości próby wielkości wyjściowej można potraktować jako kolejne przybliżenia wartości funkcji odwrotnej dystrybuanty. Zasadę działania tego algorytmu przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6. Schemat przedstawiający sposób wyznaczania kwantyli wielkości wyjściowej metodą Monte Carlo

Obliczenia metodą MC można wykonywać posługując się arkuszem kalkulacyjnym [3] a jego możliwości można rozszerzyć wykorzystując język skryptowy (np. VBA lub Python) i automatyzując cały proces [4]. Rozwiązania tego typu doskonale sprawdzają się w codziennej praktyce laboratoryjnej, jednak generowanie liczb pseudolosowych za pośrednictwem arkuszy kalkulacyjnych trwa stosunkowo długo. Ponieważ jakość wyników obliczeń w dużym stopniu zależy od liczby wygenerowanych próbek, alternatywnym rozwiązaniem może być wykorzystanie w obliczeniach programów napisanych w językach kompilowanych. W Laboratorium Długości Zakładu Długości i Kąta GUM opracowano w języku C++ program służący do szacowania omawianą metodą niepewności pomiaru zmienności długości. Algorytm jego działania, który został przedstawiony na rys. 7, oparty jest na zaleceniach dokumentu [2].



Rys. 7. Schemat algorytmu programu obliczeniowego wykorzystującego metodę Monte Carlo do analizy niepewności pomiarów zmienności długości

## 5. Teoria statystyk pozycyjnych

W części tej przedstawiona została metoda wykorzystana do walidacji obliczeń wykonanych metodą Monte Carlo. Ze względu na większą przejrzystość wybrano przypadek zmiennych losowych o identycznych rozkładach prawdopodobieństwa, co odpowiada sytuacji kiedy wszystkie estymaty wielkości wejściowych (wartość oczekiwana zmierzonych długości płytki wzorcowej) wynoszą zero. Niech  $X_1, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie prawdopodobieństwa  $f(x)$  oraz dystrybuancie  $F(x)$ . Niech  $X_{1:n} < X_{2:n} < \dots < X_{n:n}$  będą statystykami pozycyjnymi otrzymanymi przez uszeregowanie  $n$  wielkości  $X_i$  w porządku niemalejącym. Wtedy dystrybuantą zmiennej  $X_{r:n}$  jest funkcja

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \binom{i}{n} \{F(x)\}^i \{1-F(x)\}^{n-i} f(x) \quad (7)$$

a rozkład gęstości prawdopodobieństwa zdefiniowany jest przez funkcję [5]

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \{F(x)\}^{r-1} \{1-F(x)\}^{n-r} f(x) \quad (8)$$

Przedstawione w punkcie 3 funkcje  $\max(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  i  $\min(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  są równe co do wartości odpowiednio ostatniemu i pierwszemu elementowi, uszeregowanego niemalejąco zbioru  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ . Żeby otrzymać rozkład różnicy tych funkcji, odpowiadającej równaniu pomiaru  $v$ , należy najpierw wyznaczyć wspólny rozkład prawdopodobieństwa dla  $X_{1:n}$  i  $X_{n:n}$ . Rozkład ten będzie opisywał prawdopodobieństwo, że w uzyskanym zbiorze liczb konkretna ich para będzie reprezentowała najmniejszą i największą wartość. Wspólny rozkład gęstości prawdopodobieństwa dla  $X_{r:n}$  i  $X_{s:n}$  ( $1 \leq r \leq s \leq n$ ) w ogólności wyraża się przez [5]

$$f_{r,s:n}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \{F(x)\}^{r-1} \{F(y)-F(x)\}^{s-r-1} \times \{1-F(y)\}^{n-s} f(x)f(y) \quad (9)$$

gdzie  $-\infty < r < s < \infty$ . Rozkład prawdopodobieństwa zmienności długości będzie opisywać rozkład różnicy  $X_{1:n}$  i  $X_{n:n}$ , który można otrzymać wprowadzając nową zmienną losową  $W = X_{n:n} - X_{1:n}$  przyjmującą wartości  $w$ . Oszacować go można korzystając z wzoru (9), dokonując transformacji  $y \rightarrow x + w$  oraz wprowadzając całkowanie po zmiennej  $x$ . Otrzymuje się wtedy

$$f_w(w) = \int_{-\infty}^{\infty} dx n(n-1) f(x) \{F(x+w)-F(x)\}^{n-2} f(x+w) \quad (10)$$

Postać ta jest możliwa do zastosowania w programach obliczeniowych, na przykład systemach algebry komputerowej CAS (Computer Algebra Systems). Posługując się metodami numerycznymi powyższy wzór można wykorzystać do oszacowania rozkładu statystyki  $W$ . Analizując rozkład zmienności długości  $v$  przyjmuje się, że  $n = 5$  lub  $n = 4$  jeżeli pomiary długości płytki wzorcowej były wykonywane względem centralnego punktu P2, dobierając odpowiednie rozkłady prawdopodobieństwa wielkości wejściowych.

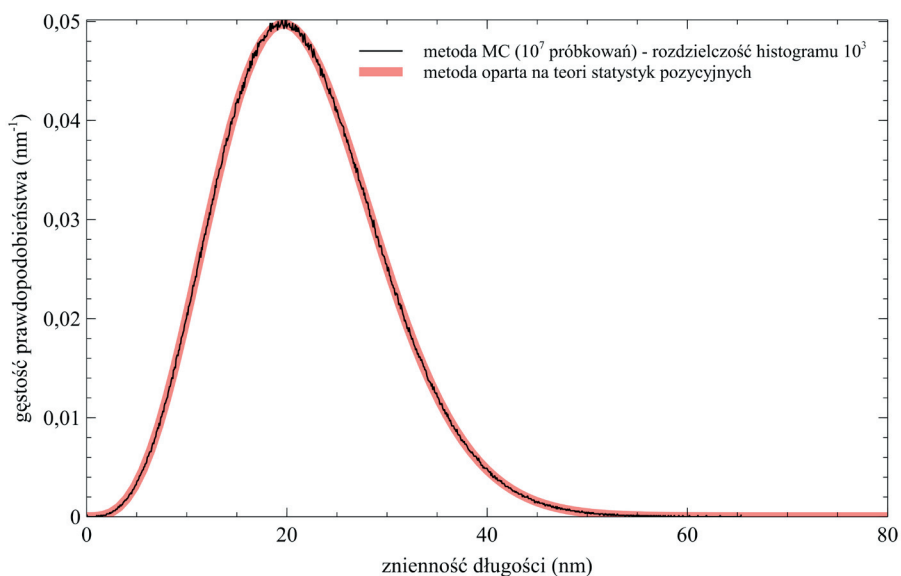
## 6. Wyniki obliczeń

W tabeli 1 przedstawiono wyniki symulacji przeprowadzonych dla płytek wzorcowych, przy których pomiary długości w punktach P3, P4, P5 i P6 względem punktu P2 dały różne rezultaty. W nawiasach podano rozdzielone średnikami estymaty wielkości wejściowych  $\Delta l_3, \Delta l_4, \Delta l_5, \Delta l_6$ . Przyjęto złożoną niepewność standardową tych pomiarów  $u(\Delta l) = 9,3$  nm i normalny rozkład prawdopodobieństwa wielkości wejściowych.

Tabela 1. Wyniki analiz niepewności pomiaru zmienności długości przeprowadzonych metodą Monte Carlo dla różnych estymat wielkości wejściowych

Parametry rozkładu wielkości wyjściowej	Estymaty wielkości wejściowych			
	(0;0;0;0)	(0;0;0;10)	(0;0;0;20)	(0;0;0;30)
Średnia arytmetyczna	21,63 nm	24,08 nm	30,72 nm	39,76 nm
Mediana	20,99 nm	23,41 nm	30,21 nm	39,54 nm
Dolna granica przedziału rozszerzenia	7,90 nm	8,86 nm	12,21 nm	18,72 nm
Górna granica przedziału rozszerzenia	39,03 nm	43,15 nm	52,17 nm	62,12 nm
Długość przedziału rozszerzenia	31,13 nm	34,29 nm	39,96 nm	43,40 nm

Na rys. 8 przedstawiono, jako ilustrację procesu walidacji, wykres gęstości prawdopodobieństwa pomiaru zmienności długości oszacowanej, zarówno metodą Monte Carlo, jak i metodą opracowaną w oparciu o teorię statystyk pozycyjnych. W tych obliczeniach przyjęto, że wszystkie estymaty wielkości wejściowych mają rozkład normalny o wartości oczekiwanej zero oraz odchyleniu standardowym 9,3 nm.



Rys. 8. Wynik symulacji Monte Carlo porównany z obliczeniami opartymi o teorię statystyk pozycyjnych

## 7. Podsumowanie

Analiza wyników szacowania niepewności pomiaru zmienności długości płytek wzorcowych wykazała, że:

- wyniki uzyskane metodą Monte Carlo i w oparciu o teorię statystyk pozycyjnych są zgodne,
- rozkład gęstości prawdopodobieństwa zmienności długości  $v$  w ogólności nie jest rozkładem symetrycznym,
- długość przedziału rozszerzenia będzie inna dla różnych estymat wielkości wejściowych (oszacowanych względem punktu P2 długości płytki wzorcowej w punktach P3, P4, P5 i P6),

- wartość oczekiwana zmienności długości  $v$  może być inna niż wynikająca z prostego rachunku estymat wielkości wejściowych (na przykład wartość oczekiwana pomiaru zmienności długości jest różna od zera nawet jeżeli wszystkie estymaty wielkości wejściowych będą wynosić zero).

## Literatura

1. Ted Doiron, John Beers, "The Gauge Block Handbook", NIST 2005.
2. Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. BIPM JCGM 101:2008.
3. P. Fotowicz, Obliczenia niepewności pomiaru metodą Monte Carlo w arkuszu kalkulacyjnym, Metrologia – Biuletyn Głównego Urzędu Miar, Warszawa 2010.
4. Dariusz Czulek, Uncertainty calculation using Monte Carlo method – MS Excel application, referat wygłoszony podczas warsztatów towarzyszących posiedzeniu TC-L EURAMET 2008.
5. N. Balakrishnan, Permanents, Order Statistics, Outliers, and Robustness, Revista Matematica Complutense 2007, vol. 20.