

# Program komputerowy do obliczania niepewności pomiaru metodą Monte Carlo

**Dariusz Czulek**

Główny Urząd Miar – Zakład Długości i Kąta

W 2008 roku opublikowany został przez Wspólny Komitet ds. Przewodników w Metrologii (JCGM) dokument „Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the *Guide to the expression of uncertainty in measurement* – Propagation of distributions using a Monte Carlo method”. Autorzy dokumentu zalecają wykorzystanie metod numerycznych do: walidacji obliczeń niepewności pomiaru, obliczania niepewności pomiaru dla nowo tworzonych stanowisk pomiarowych, obliczania niepewności pomiaru dla skomplikowanych modeli matematycznych czy też modeli posiadających duże składowe niepewności lub asymetryczne funkcje gęstości prawdopodobieństwa. W Laboratorium Długości Zakładu Długości i Kąta opracowano program komputerowy do obliczania niepewności pomiaru metodą Monte Carlo. Przedstawiono praktyczne zastosowanie programu obliczeniowego.

## Software for calculation of uncertainty using the Monte Carlo method

In 2008, a new document „Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the *Guide to the expression of uncertainty in measurement* – Propagation of distributions using a Monte Carlo method” was published by the Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM). Authors of the new document propose using the Monte Carlo method for validation of the uncertainty calculation, calculation of uncertainty in new measurement set-ups, for complicated models or models with input quantities having “large” uncertainties or asymmetric probability density functions. Practical realization of the software created in the Length Section of the Length and Angle Division, which uses the Monte Carlo method for calculation of the uncertainty, has been presented.

## 1. Wstęp

W 2008 roku opublikowany został przez Wspólny Komitet ds. Przewodników w Metrologii (JCGM) dokument „Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the *Guide to the expression of uncertainty in measurement* – Propagation of distributions using a Monte Carlo method” [1]. Przedstawia on nowe podejście do sposobu wyznaczania niepewności pomiaru, zalecając metodę numeryczną Monte Carlo.

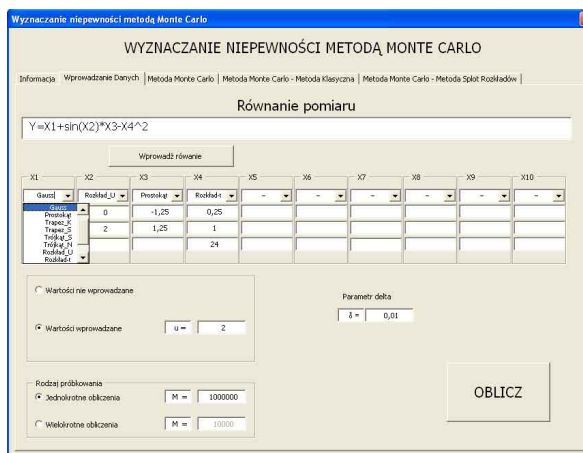
## 2. Program komputerowy

W Laboratorium Długości Zakładu Długości i Kąta w Głównym Urzędzie Miar opracowano program komputerowy, który umożliwi wyznaczenie niepewności pomiaru przy wykorzystaniu metody Monte Carlo. Program został napisany przy użyciu języka Visual Basic for Applications, będącego elementem arkusza kalkulacyjnego MS Excel. Przykładowe okno programu komputerowego przedstawia rys. 1.

Program komputerowy umożliwia zdefiniowanie dowolnego matematycznego modelu pomiaru zawierającego nie więcej niż 10. wielkości wejściowych. Wielkości wejściowe mogą być opisane następującymi rozkładami prawdopodobieństwa:

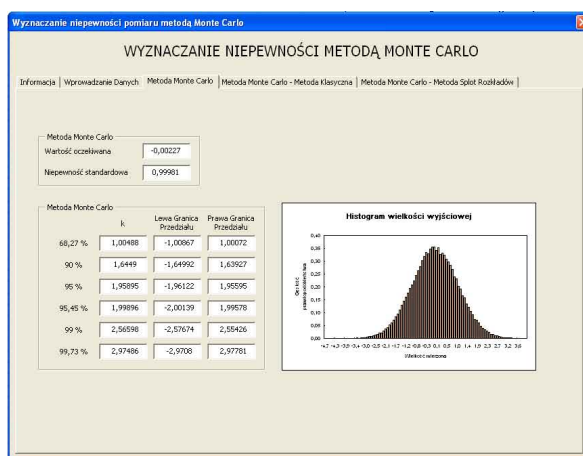
- normalnym,
- prostokątnym,
- trapezowym symetrycznym,

- trapezowym niesymetrycznym,
- trójkątnym symetrycznym,
- trójkątnym niesymetrycznym,
- rozkładem  $t$ -Studenta,
- rozkładem typu U,
- gamma,
- eksponencjalnym.



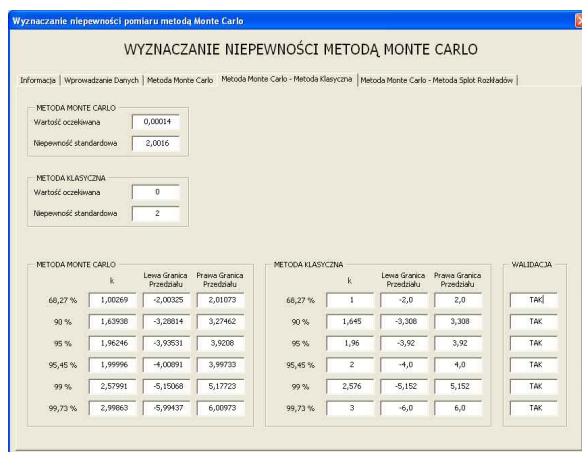
Rys. 1. Menu użytkownika

Po zdefiniowaniu wielkości wejściowych, a więc wpisaniu wartości estymat oraz niepewności standardowych lub granic przedziałów zmienności wielkości wejściowych program automatycznie oblicza niepewność pomiaru dla zadeklarowanego modelu matematycznego. Przykładowe okno programu z wynikami obliczeń przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Prezentacja wyników obliczeń niepewności pomiaru metodą Monte Carlo

Program komputerowy wyznacza wartość estymaty wielkości wyjściowej, jej niepewność standardową oraz przedziały rozszerzenia wraz z wyznaczonymi współczynnikami rozszerzenia  $k$  dla 6. wartości prawdopodobieństwa. Dodatkowo tworzony jest wykres gęstości prawdopodobieństwa wielkości wyjściowej w celu jej graficznego zobrazowania. Program umożliwia także zwalidowanie niepewności pomiaru wyznaczonej za pomocą prawa propagacji niepewności. Rys. 3 przedstawia odpowiednie okno programu.



Rys. 3. Prezentacja wyników walidacji przy użyciu metody Monte Carlo niepewności pomiaru wyznaczonej za pomocą prawa propagacji niepewności

### 3. Walidacja programu komputerowego

Dokument [1] podaje szereg przykładów, które pozwoliły zwalidować poprawność pracy programu komputerowego. Między innymi rozpatrywany jest tam przykład obliczeniowy o następującym równaniu pomiaru

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \quad (1)$$

gdzie:  $Y$  – wielkość wyjściowa,  $X_1, X_2, X_3, X_4$  – wielkości wejściowe.

Obliczenia wykonano dla trzech wariantów wielkości wejściowych:

- 1) wszystkim wielkościom wejściowym przypisane zostały rozkłady normalne prawdopodobieństwa o wartości estymaty 0 i niepewności standardowej 1,
- 2) wszystkim wielkościom wejściowym przypisane zostały prostokątne rozkłady prawdopodobieństwa o wartości estymaty 0 i niepewności standardowej 1,
- 3) trzem pierwszym wielkościom wejściowym przypisane zostały prostokątne rozkłady prawdopodobieństwa o wartości estymaty 0 i niepewności standardowej 1. Czwarta wielkość wejściowa, opisana prostokątnym rozkładem prawdopodobieństwa posiada wartość estymaty 0 i niepewność standardową 10.

W tabelach 1 ÷ 3 pokazane zostały wyniki obliczeń zeprezentowane w dokumencie [1] oraz wyniki otrzymane przy użyciu programu komputerowego. Przyjęto następujące oznaczenia: GUF – wartość obliczona zgodnie z wytycznymi Przewodnika [2], MCM – wartość obliczona przy użyciu metody Monte Carlo,  $y$  – estymata wielkości wyjściowej,  $u(y)$  – wartość niepewności standardowej,  $y_{low}$  – dolna granica przedziału rozszerzenia dla prawdopodobieństwa  $p = 95 \%$ ,  $y_{high}$  – górna granica przedziału rozszerzenia dla prawdopodobieństwa  $p = 95 \%$ .

Tab. 1. Porównanie wyników obliczeń dla wariantu 1

	Przewodnik		Program	
	$y$	$u(y)$	$y$	$u(y)$
GUF	0,00	2,00	0,00	2,00
MCM( $10^5$ )	-0,01	1,98	0,00	2,00
MCM( $10^6$ )	0,00	2,00	0,00	2,00
MCM( $1,25 \cdot 10^6$ )	0,00	2,00	0,00	2,00
MCM ( $1,09 \cdot 10^6$ )	0,00	2,00	0,00	2,00
	$y_{\text{low}}$	$y_{\text{high}}$	$y_{\text{low}}$	$y_{\text{high}}$
GUF	-3,92	3,92	-3,92	3,92
MCM( $10^5$ )	-3,92	3,88	-3,92	3,90
MCM( $10^6$ )	-3,92	3,93	-3,92	3,92
MCM( $1,25 \cdot 10^6$ )	-3,92	3,92	-3,92	3,92
MCM ( $1,09 \cdot 10^6$ )	-3,92	3,92	-3,92	3,92

Tab. 2. Porównanie wyników obliczeń dla wariantu 2

	Przewodnik		Program	
	$y$	$u(y)$	$y$	$u(y)$
GUF	0,00	2,00	0,00	2,00
MCM( $10^5$ )	0,00	1,99	0,00	2,00
MCM( $10^6$ )	0,00	2,00	0,00	2,00
MCM( $1,07 \cdot 10^6$ )	0,00	2,00	0,00	2,00
MCM( $0,89 \cdot 10^6$ )	0,00	2,00	0,00	2,00
	$y_{\text{low}}$	$y_{\text{high}}$	$y_{\text{low}}$	$y_{\text{high}}$
GUF	-3,92	3,92	-3,92	3,92
MCM( $10^5$ )	-3,89	3,88	-3,89	3,87
MCM( $10^6$ )	-3,88	3,88	-3,88	3,88
MCM( $1,07 \cdot 10^6$ )	-3,89	3,88	-3,88	3,88
MCM( $0,89 \cdot 10^6$ )	-3,88	3,88	-3,88	3,88

Tab. 3. Porównanie wyników obliczeń dla wariantu 3

	Przewodnik		Program	
	$y$	$u(y)$	$y$	$u(y)$
GUF	0,0	10,1	0,0	10,1
MCM( $10^5$ )	0,0	10,1	0,0	10,1
MCM( $10^6$ )	0,0	10,1	0,0	10,1
MCM( $0,05 \cdot 10^6$ )	0,1	10,2	0,0	10,1
MCM( $0,06 \cdot 10^6$ )	0,0	10,1	0,0	10,1
	$y_{\text{low}}$	$y_{\text{high}}$	$y_{\text{low}}$	$y_{\text{high}}$
GUF	-19,9	19,9	-19,9	19,9
MCM( $10^5$ )	-17,0	17,0	-17,0	17,0
MCM( $10^6$ )	-17,0	17,0	-17,0	17,0
MCM( $0,05 \cdot 10^6$ )	-17,0	17,1	-17,0	17,1
MCM( $0,06 \cdot 10^6$ )	-17,1	17,0	-17,1	17,0

#### 4. Wzorcowanie wzorca masy

Matematyczny model pomiaru podczas wzorcowania wzorców masy opisany jest równaniem

$$\delta m = (m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \left[ 1 + (\rho_a - \rho_{a0}) \left( \frac{1}{\rho_W} - \frac{1}{\rho_R} \right) \right] - m_{nom} \quad (2)$$

gdzie:  $\delta m$  – odchylenie od wartości nominalnej,  $m_{R,c}$  – umowna masa wzorca R,  $\delta m_{R,c}$  – umowna masa o małym ciężarze,  $\rho_a$  – gęstość powietrza,  $\rho_{a0} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_W$  – gęstość wzorca masy W,  $\rho_R$  – gęstość wzorca masy R,  $m_{nom}$  – wartość nominalna wzorca masy.

W tab. 4 przedstawiono parametry charakteryzujące wielkości wejściowe znajdujące się w równaniu 2. Przyjęto następujące oznaczenia:  $N(\mu, \sigma^2)$  – rozkład normalny z wartością oczekiwaną  $\mu$  i odchyleniem standardowym  $\sigma$ ,  $R(a,b)$  – rozkład prostokątny z wartością oczekiwaną  $(a+b)/2$  i szerokością połówkową  $(b-a)/2$ .

Tab. 4. Wielkości wejściowe wzorcowania wzorca masy

$X_i$	Rozkład	$\mu$ (mg)	$\sigma$ (mg)	$(a+b)/2$ (kg/m <sup>3</sup> )	$(b-a)/2$ (kg/m <sup>3</sup> )
$m_{R,c}$	$N(\mu, \sigma^2)$	100 000,0	0,050		
$\delta m_{R,c}$	$N(\mu, \sigma^2)$	1,234	0,020		
$\rho_a$	$R(a,b)$			1,20	0,10
$\rho_W$	$R(a,b)$			$8 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^3$
$\rho_R$	$R(a,b)$			$8,00 \cdot 10^3$	$0,05 \cdot 10^3$

W tab. 5 zestawiono wyniki obliczeniowe przyjmujące następujące oznaczenia:  $GUF_1$  – wartości obliczone zgodnie z wytycznymi Przewodnika [2], MCM – wartości obliczone za pomocą metody Monte Carlo przez autorów dokumentu [1], MCM (program) – wartości obliczone za pomocą metody Monte Carlo przy użyciu programu komputerowego,  $GUF_2$  – wartości obliczone zgodnie z wytycznymi Przewodnika [2] z uwzględnieniem wyrazów wyższego rzędu,  $\delta m$  – wartość oczekiwana odchylenia od wartości nominalnej,  $u(\delta m)$  – wartość niepewności standardowej odchylenia od wartości nominalnej,  $m_{low}$  – dolna granica przedziału rozszerzenia dla prawdopodobieństwa  $p = 95 \%$ ,  $m_{high}$  – górna granica przedziału rozszerzenia dla prawdopodobieństwa  $p = 95 \%$ .

Tab. 5. Zestawienie wyników obliczeń

Metoda	$\delta m$ (mg)	$u(\delta m)$ (mg)	$m_{low}$ (mg)	$m_{high}$ (mg)
$GUF_1$	1,2340	0,0539	1,1284	1,3396
MCM	1,2341	0,0754	1,0831	1,3822
MCM (program)	1,2340	0,0755	1,0832	1,3823
$GUF_2$	1,2340	0,0750	1,0870	1,3810

## 5. Wzorcowanie płytek wzorcowych metodą porównawczą

Model matematyczny wzorcowania płytek wzorcowych metodą porównawczą opisany jest następującym równaniem:

$$\delta L = L_s + D + d_1 + d_2 - L_s[\delta\alpha(\theta_0 + \Delta) + \alpha_s\delta\theta] - L_{\text{nom}} \quad (3)$$

gdzie:  $\delta L$  – odchylenie długości środkowej od długości nominalnej płytki wzorcowej,  $L_s$  – długość płytki wzorcowej odniesienia,  $D$  – różnica długości płytek wzorcowych,  $d_1$  – przypadkowe błędy komparatora,  $d_2$  – systematyczne błędy komparatora,  $\delta\alpha$  – różnica współczynników rozszerzalności liniowej płytek wzorcowych,  $\theta_0$  – średnie odchylenie temperatury od temperatury 20 °C,  $\Delta$  – cykliczna zmiana temperatury,  $\alpha_s$  – współczynnik rozszerzalności liniowej płytki wzorcowej odniesienia,  $\delta\theta$  – różnica temperatur płytek wzorcowych,  $L_{\text{nom}}$  – długość nominalna płytki wzorcowej.

W tabelach 6 i 7 przedstawiono parametry charakteryzujące wielkości wejściowe równania (3). W tab. 6 przyjęto następujące oznaczenia:  $\mu$  – wartość oczekiwana,  $\sigma$  – odchylenie standardowe,  $\nu$  – wypadkowa liczba stopni swobody,  $t_\nu(\mu, \sigma^2)$  – rozkład  $t$ -Studenta,  $N(\mu, \sigma^2)$  – rozkład normalny. W tab. 7 przyjęto oznaczenia:  $a$  – dolna granica rozkładu,  $b$  – górna granica rozkładu,  $R(a, b)$  – rozkład prostokątny,  $U(a, b)$  – rozkład typu U,  $CTp(a, b, d)$  – rozkład (trapezowy krzywoliniowy) o niedokładnie określonych granicach  $\pm d$ .

Tab. 6. Wielkości wejściowe wzorcowania płytek wzorcowych

$X_i$	Rozkład	$\mu$	$\sigma$	$\nu$
$L_s$	$tv(\mu, \sigma^2)$	50 000 623 nm	25 nm	18
$D$	$tv(\mu, \sigma^2)$	215 nm	6 nm	24
$d_1$	$tv(\mu, \sigma^2)$	0 nm	4 nm	5
$d_2$	$tv(\mu, \sigma^2)$	0 nm	7 nm	8
$\theta_0$	$N(\mu, \sigma^2)$	-0.1 °C	0.2 °C	

Tab. 7. Wielkości wejściowe wzorcowania płytek wzorcowych

$X_i$	Rozkład	$a$	$b$	$d$
$\alpha_s$	$R(a, b)$	$9,5 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$	$13,5 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$	
$\Delta$	$U(a, b)$	-0,5 °C	0,5 °C	
$\delta\alpha$	$CTp(a, b, d)$	$-1,0 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$	$0,1 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$
$\delta\theta$	$CTp(a, b, d)$	-0,050 °C	0,050 °C	0,025 °C

W tab. 8 przedstawiono zestawienie wyników pokazanych w dokumencie [1] oraz uzyskanych za pomocą programu komputerowego. Przyjęto następujące oznaczenia:  $\delta L$  – estymata odchylenia długości środkowej od długości nominalnej płytki wzorcowej,  $u(\delta L)$  – niepewność standardowa odchylenia długości środkowej od długości nominalnej płytki wzorcowej,  $\delta L_{\text{low}}$  – dolna granica przedziału rozszerzenia dla prawdopodobieństwa  $p = 95 \%$ ,  $\delta L_{\text{high}}$  – górna granica przedziału rozszerzenia dla prawdopodobieństwa  $p = 95 \%$ .

Tab. 8. Zestawienie wyników obliczeń

Metoda	$\delta L$ (nm)	$u(\delta L)$ (nm)	$\delta L_{\text{low}}$ (nm)	$\delta L_{\text{high}}$ (nm)
GUF	838	32	746	930
MCM (przewodnik)	838	36	745	931
MCM (GUM)	838	36	744	931

## 6. Podsumowanie

Na podstawie przykładów przedstawionych w tej pracy można stwierdzić, że program komputerowy opracowany w Laboratorium Długości Zakładu Długości i Kąta GUM działa poprawnie, został zwalidowany i może być używany do wyznaczania niepewności pomiaru.

Program komputerowy wykorzystujący metodę Monte Carlo do obliczania niepewności pomiaru umożliwia zwalidowanie niepewności pomiaru wyznaczonej za pomocą prawa propagacji niepewności. Dodatkowo, dzięki prostocie obsługi, możliwe jest szybkie wyznaczenie niepewności pomiaru skomplikowanych równań pomiarowych. Metoda Monte Carlo z powodzeniem może też być wykorzystywana do obliczania i sprawdzania wyników porównań międzylaboratoryjnych.

## Literatura

- [1] Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the *Guide to the expression of uncertainty in measurement* – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. JCGM 101:2008.
- [2] *Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik*. Główny Urząd Miar, 1999.