Szkolenie dotyczące niepewności pomiaru w Europejskiej Sieci Metrologicznej MATHMET

Measurement uncertainty training in the European Metrology Network MATHMET

Paweł Fotowicz, Jacek Puchalski
Główny Urząd Miar

Omówiono prezentację multimedialną dotyczącą niepewności pomiaru, przygotowaną w ramach projektu realizowanego w Europejskiej Sieci Metrologicznej MATHMET. Prezentacja w sposób przystępny przedstawia metody wyznaczania współczynnika rozszerzenia podawanego w świadectwach wzorcowania. Będzie uzupełnieniem materiałów szkoleniowych związanych z niepewnością pomiaru.

A multimedia presentation on the measurement uncertainty, prepared as part of the project implemented in the European Metrological Network MATHMET, was presented. In a simple way, it presents the methods of determining the coverage factor given in calibration certificates. It will complement training materials related to measurement uncertainty.

Słowa kluczowe: szkolenia dotyczące niepewności pomiaru, współczynnik rozszerzenia
Keywords: measurement uncertainty training, coverage factor

Wprowadzenie

W ramach działania Europejskiej Sieci Metrologicznej MATHMET powstała inicjatywa opracowania szkoleń dotyczących niepewności pomiaru. Inicjatywa ta nosi nazwę MU Training (Measurement uncertainty training). Działanie to ma na celu poprawę jakości, efektywności, a także szerokiego rozpowszechniania szkoleń z zakresu niepewności pomiaru. Wynika z potrzeby lepszego rozumienia zagadnień związanych z opracowaniem wyników pomiarów, zgodnie z przyjętymi rozwiązaniami w metrologii. W ramach inicjatywy opracowane zostaną nowe materiały szkoleniowe, które będą udostępnione na stronie internetowej MATHMET. Nowy materiał będzie zawierał przegląd istniejących kursów, oprogramowania i przykładów dotyczących obliczania niepewności pomiaru. Będzie adresowany do szerokiego kręgu odbiorców, praktyków metrologii, w środowisku przemysłowym, jak i akademickim. Powstaną materiały w formie wideo wyjaśniające potrzebę i trudności przy ocenie niepewności pomiaru. Otworzy się w ten sposób szansa na stworzenie podstaw dla nowych kursów szkoleniowych z tego zakresu. Zwiększy się w ten sposób dostępność wiedzy w tym zakresie dla licznych grup odbiorców, pracowników laboratoriów, studentów czy badaczy. Przyczyni się też do rozwoju dobrych praktyk metrologicznych, tworząc materiały szkoleniowe, na poziomie początkującym i zaawansowanym, pomocne dla osób prowadzących szkolenia dotyczące problematyki niepewności pomiaru w instytucjach metrologicznych i na uczelniach. Działanie to zwiększy zrozumienie dla tematyki niepewności pomiaru, a tym samym przyczyni się do zwiększenia wiarygodności pomiarów wykonywanych na poziomach od przemysłowego do naukowego.

Działania GUM w projekcie MU Training

Główny Urząd Miar (GUM), obok innych krajowych instytucji metrologicznych, takich jak PTB (Niemcy) – koordynator projektu, NPL (Wielka Brytania), LNE (Francja), INRIM (Włochy), CEM (Hiszpania), METAS (Szwajcaria), SMD (Belgia), IPQ (Portugalia) czy IMBiH (Bośnia i Hercegowina), bierze udział w tym projekcie. W ramach jego realizacji w GUM opracowano prezentację multimedialną na temat wyznaczania współczynnika rozszerzenia. Prezentacja dotyczy sposobów jego obliczania i uświadomienia metrologom istnienie takiej potrzeby przy opracowywaniu wyniku pomiaru. Tak się składa, że metody wyznaczania współczynnika rozszerzenia były już opracowane w GUM w przeszłości i zostały opublikowane w krajowych i międzynarodowych czasopismach związanych z metrologią [1–6]. Poniżej przedstawiono krótki ich opis.

Metody wyznaczania współczynnika rozszerzenia opracowane w GUM

Metody wyznaczania współczynnika rozszerzenia opierają się na założeniu, że rozkładem wielkości wyjściowej jest rozkład płasko-normalny, który jest splotem rozkładu prostokątnego z rozkładem normalnym. Rozkład ten jest bardzo efektywnym przybliżeniem wielokrotnego splotu rozkładów takich jak rozkłady normalny, prostokątny, trójkątny czy trapezowy, które na ogół przypisuje się wielkościom wejściowym. Metody polegają na wyznaczeniu parametru nazywanego ilorazem niepewności, który określa ilościową relację udziału $u_i(y)$ największej składowej o rozkładzie prostokątnym w budżecie niepewności do skumulowanego udziału pozostałych składowych:

$$r_u = \frac{|u_i(y)|}{\sqrt{u_c^2(y) - u_i^2(y)}} \tag{1}$$

gdzie $u_c(y)$ to niepewność standardowa złożona.

Współczynnik rozszerzenia można wyznaczyć bezpośrednio z rozkładu płasko-normalnego lub pośrednio poprzez przybliżenie go znanymi rozkładami: normalnym, trapezowym i prostokątnym. W obu wypadkach jest on równy kwantylom tych rozkładów dla określonego prawdopodobieństwa rozszerzenia, na ogół 95 %.

W pierwszym sposobie współczynnik rozszerzenia k dla prawdopodobieństwa p = 95 %, dla określonej wartości ilorazu niepewności r_u, jest wyznaczany na podstawie wartości podanych w tab. 1:

$$k = k_{\mathrm{PN}} \tag{2}$$

W alternatywnej metodzie postępowania współczynnik rozszerzenia wyznacza się poprzez przybliżenie przy użyciu rozkładów normalnego, prostokątnego i trapezowego:

$$\begin{gathered} k = k_{\mathrm{N}} \text{ dla } 0 < r_u < 1 \\ k = k_{\mathrm{T}} \text{ dla } 1 \le r_u \le 10 \\ k = k_{\mathrm{P}} \text{ dla } r_u > 10 \end{gathered} \tag{3}$$

gdzie:

k_{N} – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu normalnego

k_{T} – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu trapezowego

k_{P} – współczynnik rozszerzenia dla rozkładu prostokątnego

$$k_{\mathrm{T}} = \sqrt{\frac{3}{r_u^2 + 1}}\left(1 + r_u - 2\sqrt{r_u(1-p)}\right) \tag{4}$$

$$k_{\mathrm{P}} = \sqrt{3}p \tag{5}$$

Potrzeba wyznaczania współczynnika rozszerzenia

Współczynnik rozszerzenia podawany jest obligatoryjnie w świadectwach wzorcowania wystawianych przez laboratoria wzorcujące. Dlatego powinien być rzetelnie oszacowany. Niestety, często jego wartość jest zaokrąglana do liczby 2. Takie zaokrąglenie jednak może prowadzić do znacznej nieścisłości. Otóż, gdyby rozkładem związanym z wynikiem pomiaru był rozkład prostokątny (co nie jest rzadkim przypadkiem, gdy dominująca składową jest rozdzielczość przyrządu pomiarowego), to wartość współczynnika rozszerzenia, obliczona na podstawie równania (5) dla prawdopodobieństwa 95 %, wynosi k = 1,65. Natomiast nieprzekraczalne granice przedziału rozszerzenia wynoszą ±1,73, co odpowiada 100 % przedziałowi. Zatem przyjęcie zaokrąglenia współczynnika rozszerzenia do k = 2 oznaczałoby 115 % przedział rozszerzenia, a nie 95 % przedział, jak *de facto* informuje o tym świadectwo wzorcowania. Aby uniknąć tej nieścisłości należy podawać współczynnik rozszerzenia z dwoma cyframi dziesiętnymi.

Treść prezentacji multimedialnej

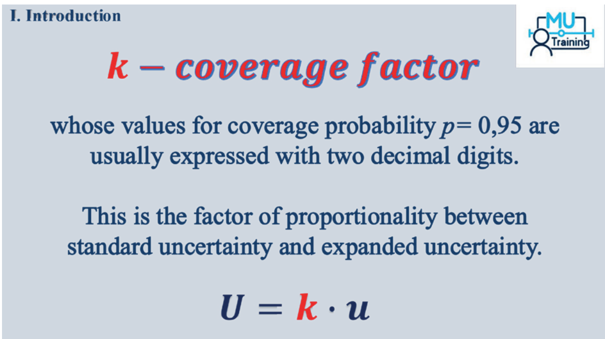
Prezentacja nosi tytuł "The coverage factor *k* explained – from *u* to *U*" (rys. 1) i składa się z trzech części. Pierwsza stanowi wprowadzenie, druga przedstawienie problemu, a trzecia zawiera potencjalne rozwiązania wskazujące precyzyjnie wartości współczynnika rozszerzenia. Prezentacja wyjaśnia, że jest to współczynnik bezwymiarowy stanowiący współczynnik proporcjonalności między niepewnością rozszerzoną a niepewnością standardową, odpowiadający prawdopodobieństwu równemu 0,95, zazwyczaj podawany z dokładnością do dwóch cyfr dziesiętnych (rys. 2).

Prezentacja zwraca uwagę, że w praktyce pomiarowej stosuje się tabelę budżetu niepewności, której konstrukcja wynika z prawa propagacji niepewności, dotyczącego jednowymiarowej wyjściowej zmiennej losowej, będącej funkcją wielu zmiennych przybliżonej przez pierwsze wyrazy szeregu Taylora, których wagi stanowią współczynniki wrażliwości. W rezultacie otrzymuje się sumę ważoną nieskorelowanych zmiennych stanowiących splot funkcji gęstości. W przestrzeni furierowskiej otrzymanej z transformaty Fouriera otrzymuje się iloczyn funkcji charakterystycznych, które w rozwinięciu z użyciem kumulantów, to jest logarytmów funkcji charakterystycznych, prowadzą do funkcji wariancji będącej sumą ważoną wariancji poszczególnych rozkładów, a wagami są kwadraty odpowiednich współczynników wrażliwości. Właśnie tak skonstruowana suma, stanowiąca niepewność standardową złożoną, stanowi prawo propagacji niepewności i jednocześnie

Tab. 1. Wartości współczynnika rozszerzenia k_{PN} dla prawdopodobieństwa 95 % przy granicznych wartościach ilorazu udziału niepewności r_u

k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości	k_{PN}	r_u do wartości
1,96	0,5090	1,85	1,6410	1,74	3,1930
1,95	0,6985	1,84	1,7380	1,73	3,4410
1,94	0,8240	1,83	1,8390	1,72	3,7300
1,93	0,9280	1,82	1,9460	1,71	4,0740
1,92	1,0220	1,81	2,0600	1,70	4,4925
1,91	1,1110	1,80	2,1820	1,69	5,0235
1,90	1,1980	1,79	2,3135	1,68	5,7350
1,89	1,2840	1,78	2,4560	1,67	6,7760
1,88	1,3700	1,77	2,6120	1,66	8,5975
1,87	1,4580	1,76	2,7845	1,65	∞
1,86	1,5480	1,75	2,9765		

Rys. 1. Slajd tytułowy prezentacji



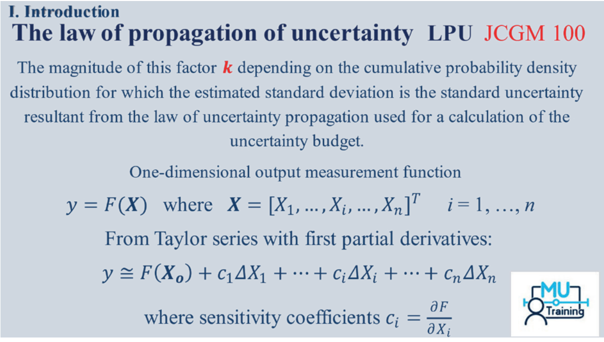
Rys. 2. Wyjaśnianie problemu

jest niepewnością standardową rozkładu wyjściowego (rys. 3).

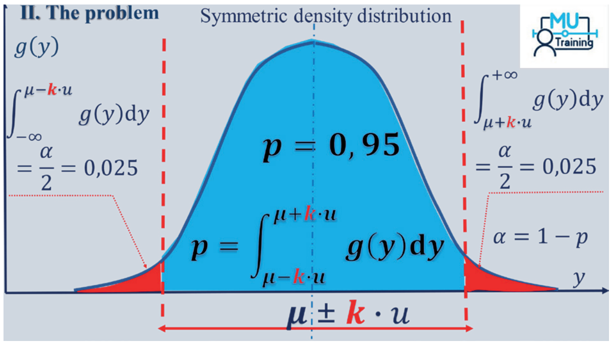
Przedział rozszerzenia dla wypadkowego rozkładu wymaga precyzyjnej wartości współczynnika rozszerzenia. Dla dowolnego rozkładu gęstości prawdopodobieństwa, w ogólności niesymetrycznego i multimodalnego, ciągły obszar prawdopodobieństwa p wyznacza przedział rozszerzenia znajdujący się między dolną i górną wartością. Dla symetrycznego rozkładu jest to przedział wokół wartości oczekiwanej o szerokości dwukrotnej niepewności rozszerzonej (rys. 4). Identyczny przedział rozszerzenia jest wyznaczany dla dystrybuanty. Ta funkcja jest jednoznacznie określona i dlatego istnieje dla niej funkcja odwrotna i z tego właśnie powodu znalazła zastosowanie przy generacji próbek losowych w metodzie Monte Carlo.

W prezentacji zasygnalizowany jest problem, jaki się pojawia podczas bardzo uproszczonego podejścia związanego z zastosowaniem współczynnika rozszerzenia równego dwa. Dla dowolnego rozkładu gęstości prawdopodobieństwa, który jest symetryczny, ciągły obszar z prawdopodobieństwem p równym 0,95 wyznacza równe wartości pozostałych dwóch obszarów o prawdopodobieństwie 0,025 każdy. Dla rozkładu normalnego, w szczególności także znormalizowanego, wartości dystrybuanty dla przedziału rozszerzenia zmieniają się od 0,025 do 0,975 (rys. 5). Dla rozkładu normalnego znane są funkcje gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuant. Dzięki temu można wyznaczyć współczynnik rozszerzenia dla rozkładu normalnego, który wynosi w przybliżeniu dwa. Jeśli rozkładem wypadkowym nie jest rozkład normalny, a np. rozkład trapezowy, to wyznaczony analitycznie współczynnik rozszerzenia zależny jest od parametru beta określającego stosunek podstaw trapezu tworzącego funkcję gęstości. Wówczas parametr beta zmienia się od zera do jeden, co odpowiada rozkładom od trójkątnego do prostokątnego, a współczynnik rozszerzenia zmienia się w przedziale od 1,9 do 1,65 (rys. 6).

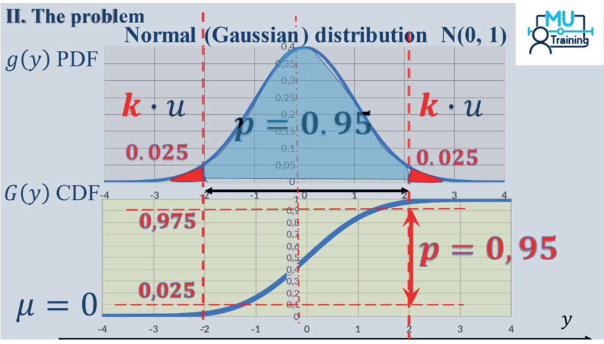
Analizując wypadkowy rozkład prostokątny jednoznacznie należy stwierdzić, że wartość dwa prowadzi do przeszacowania przedziału rozszerzenia (rys. 7). Oznacza to, że przedział zawiera miejsca, w których nie występują żadne wartości liczbowe. Przyjęcie współczynnika k



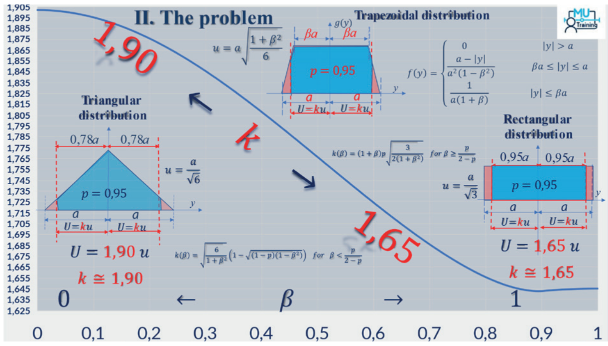
Rys. 3. Prawo propagacji niepewności



Rys. 4. Współczynnik rozszerzenia dla rozkładu symetrycznego



Rys. 5. Współczynnik rozszerzenia dla rozkładu normalnego



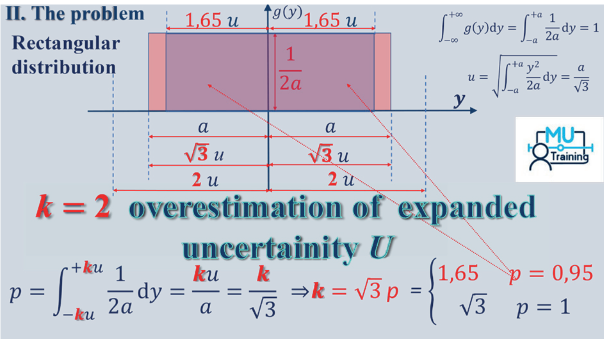
Rys. 6. Współczynnik rozszerzenia dla rozkładu trapezowego

równego 2 prowadzi do błędnego oszacowania przedziału rozszerzenia. Z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że uzyskanie rozkładu wypadkowego, jako rozkładu normalnego, wymaga tych samych niepewności standardowych dla identycznych rozkładów cząstkowych. W przeciwnym przypadku współczynnik *k* nie może być estymowany przez liczbę dwa.

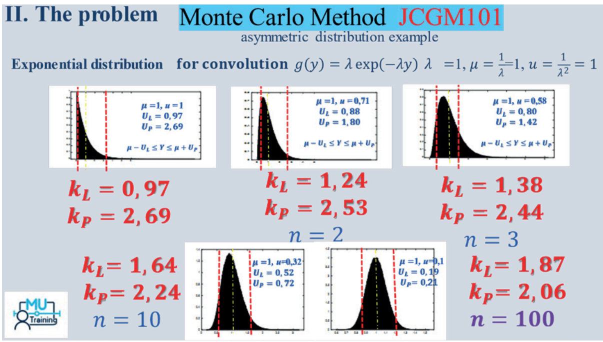
Z kolei dla rozkładów asymetrycznych centralne twierdzenie graniczne wymaga dużej liczby rozkładów. Wykonanie za pomocą metody Monte Carlo wielu symulacji prowadzi do uzyskania rozkładu prawie symetrycznego, który upodabnia się do rozkładu normalnego. Niemniej w typowym budżecie niepewności zwykle nie występują tak licznie (powyżej dziesięciu) rozkłady cząstkowe. Zatem problem w przyjęciu współczynnika rozszerzenia na poziomie dwa dla rozkładu wypadkowego polega na ograniczeniu stosowania powyższego twierdzenia dla rozkładów o tej samej wariancji czy też niepewności standardowej, a w przypadku występowania cząstkowych rozkładów asymetrycznych uwzględnienia ich dużej liczby, np. $n = 100$ (rys. 8).

W części ostatniej prezentacja proponuje trzy rozwiązania. Zastosowanie przybliżenia do rozkładem płasko-normalnym (rys. 9), dla którego wyznaczono tablicę współczynników rozszerzenia (rys. 10) lub przybliżenie współczynnikami jak dla rozkładów normalnego, trapezowego i prostokątnego (rys. 12), przy użyciu ilorazu niepewności (rys. 11). Drugim sposobem jest wyznaczenie wypadkowej liczby stopni swobody i skorzystanie z tabeli współczynnika rozszerzenia dla rozkładu *t*-Studenta. Najdokładniejszą metodę stanowi metoda numeryczna Monte Carlo, stosowana w łatwy sposób w środowisku statystycznym, np. MATLAB (rys. 13). W większości takich środowisk występują dedykowane funkcje biblioteczne, odwróconej dystrybuanty numerycznej, w celu generacji określonych rozkładów. W ten sposób bardzo łatwo można wyznaczyć współczynnik rozszerzenia.

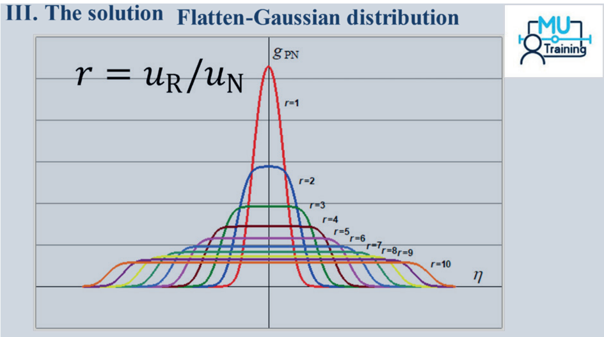
W podsumowaniu prezentacji zaprezentowano metodę szacowania niepewności wynikającą z Przewodnika [7] opartą na prawie propagacji niepewności oraz zastosowaniu współczynnika rozszerzenia dla rozkładu wypadkowego. Idea ta jest poprawna, lecz wymaga dokładnej analizy składowych w budżecie niepewności w celu dobrania odpowiedniego współczynnika rozszerzenia. Ze względu na niespełnienie warunków centralnego twierdzenia granicznego, tj. tych samych wariancji rozkładów z uwzględnieniem współczynników wrażliwości oraz małej ilości składowych, w przypadku rozkładów asymetrycznych, nie jest poprawnym zastosowanie współczynnika rozszerzenia równego liczbie dwa. Dla rozkładów typu trapezowego współczynnik ten jest mniejszy od dwóch. Z kolei dla niewielkiej liczby pomiarów, mniejszej niż trzydzieści, wartości współczynnika rozszerzenia dla wypadkowej liczby stopni swobody są większe od dwóch. Najdokładniejszą metodą



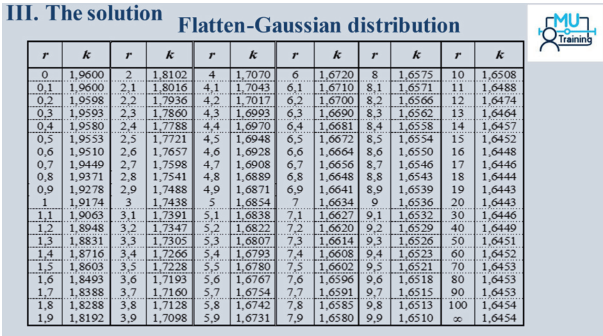
Rys. 7. Przeszacowanie współczynnika rozszerzenia



Rys. 8. Współczynnik rozszerzenia dla rozkładów asymetrycznych

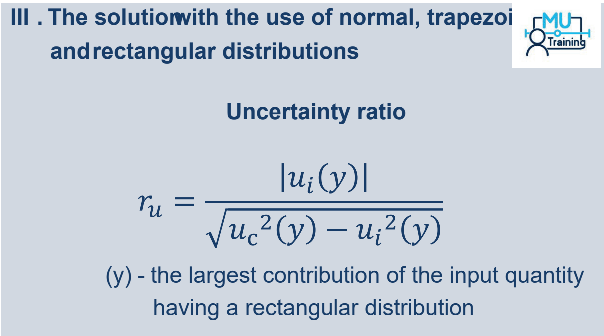


Rys. 9. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa rozkładu płasko-normalnego

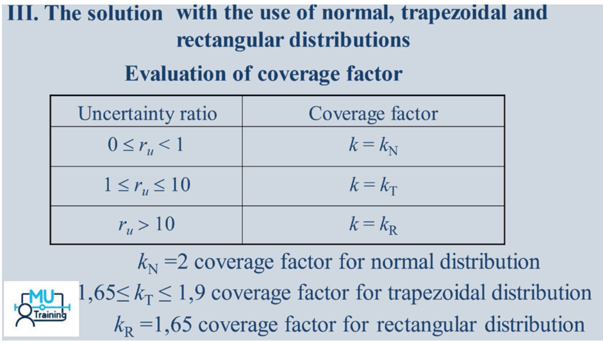


r	*k*	*r*	*k*	*r*	*k*	*r*	*k*	*r*	*k*	*r*	*k*
0	1,9600	2	1,8102	4	1,7070	6	1,6720	8	1,6575	10	1,6508
0,1	1,9600	2,1	1,8016	4,1	1,7043	6,1	1,6710	8,1	1,6571	11	1,6488
0,2	1,9598	2,2	1,7936	4,2	1,7017	6,2	1,6700	8,2	1,6566	12	1,6474
0,3	1,9593	2,3	1,7860	4,3	1,6993	6,3	1,6690	8,3	1,6562	13	1,6464
0,4	1,9580	2,4	1,7788	4,4	1,6970	6,4	1,6681	8,4	1,6558	14	1,6457
0,5	1,9553	2,5	1,7721	4,5	1,6948	6,5	1,6672	8,5	1,6554	15	1,6452
0,6	1,9510	2,6	1,7657	4,6	1,6928	6,6	1,6664	8,6	1,6550	16	1,6448
0,7	1,9449	2,7	1,7598	4,7	1,6908	6,7	1,6656	8,7	1,6546	17	1,6446
0,8	1,9371	2,8	1,7541	4,8	1,6889	6,8	1,6648	8,8	1,6543	18	1,6444
0,9	1,9278	2,9	1,7488	4,9	1,6871	6,9	1,6641	8,9	1,6539	19	1,6443
1	1,9174	3	1,7438	5	1,6854	7	1,6634	9	1,6536	20	1,6443
1,1	1,9063	3,1	1,7391	5,1	1,6838	7,1	1,6627	9,1	1,6532	30	1,6446
1,2	1,8948	3,2	1,7347	5,2	1,6822	7,2	1,6620	9,2	1,6529	40	1,6449
1,3	1,8831	3,3	1,7305	5,3	1,6807	7,3	1,6614	9,3	1,6526	50	1,6451
1,4	1,8716	3,4	1,7266	5,4	1,6793	7,4	1,6608	9,4	1,6523	60	1,6452
1,5	1,8603	3,5	1,7228	5,5	1,6780	7,5	1,6602	9,5	1,6521	70	1,6453
1,6	1,8493	3,6	1,7193	5,6	1,6767	7,6	1,6596	9,6	1,6518	80	1,6453
1,7	1,8388	3,7	1,7160	5,7	1,6754	7,7	1,6591	9,7	1,6515	90	1,6453
1,8	1,8288	3,8	1,7128	5,8	1,6742	7,8	1,6585	9,8	1,6513	100	1,6454
1,9	1,8192	3,9	1,7098	5,9	1,6731	7,9	1,6580	9,9	1,6510	∞	1,6454

Rys. 10. Współczynnik rozszerzenia dla rozkładu płasko-normalnego

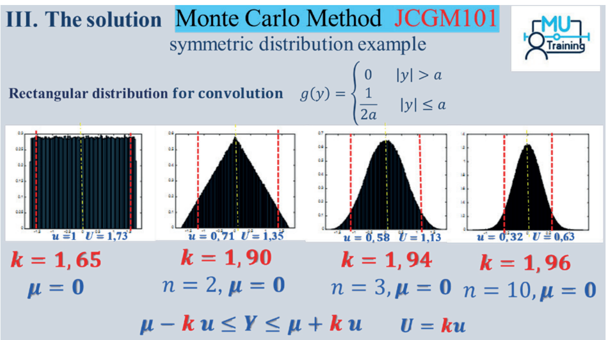


Rys. 11. Iloraz niepewności

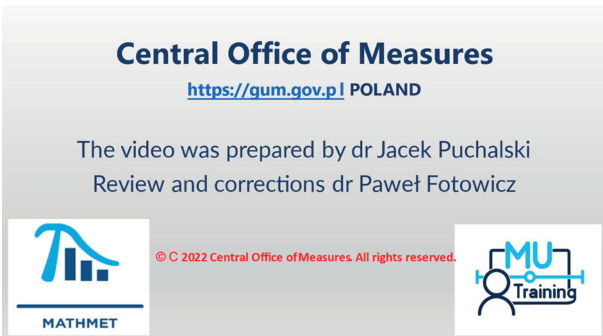


Uncertainty ratio	Coverage factor
$0 \le r_u < 1$	$k = k_N$
$1 \le r_u \le 10$	$k = k_T$
$r_u > 10$	$k = k_R$

Rys. 12. Przybliżenie rozkładami normalnym, trapezowym i prostokątnym



Rys. 13. Współczynnik rozszerzenia dla rozkładów generowanych metodą Monte Carlo



Rys. 14. Slajd kończący prezentację

w celu wyznaczenia przedziału rozszerzenia, a tym samym współczynnika rozszerzenia jest metoda Monte Carlo zastosowana w statystycznych środowiskach programistycznych.

Podsumowanie

Prezentacja multimedialna opracowana w GUM składa się z 30 slajdów i przedstawia podejścia stosowane przy wyznaczaniu współczynnika rozszerzenia w procedurach obliczania niepewności pomiaru. Zwraca uwagę na konieczność precyzyjnego określania tego współczynnika w celu unikania przeszacowania jego wartości. Prezentacja została opracowana w atrakcyjny animacyjnie sposób ze słownym komentarzem w języku polskim i angielskim. Odwołuje się rozwiązań wynikających z treści dokumentów źródłowych [7−9]. Może być pomocna dla lepszego zrozumienia zagadnień objętych tematyką kursów szkoleniowych z zakresu niepewności pomiaru i je uzupełniających.

Bibliografia

[1] P. Fotowicz: Method for calculating the coverage factor in calibration. OIML Bulletin, vol. XLIII (2002), s. 5-9.

[2] P. Fotowicz: A method of approximation of the coverage factor in calibration. Measurement, vol. 35 (2004), s. 251-256.

[3] P. Fotowicz: Metoda wyznaczania współczynnika rozszerzenia w procedurach szacowania niepewności pomiaru. PAR nr 10 (2003), s. 13-16.

[4] P. Fotowicz: Metody obliczania współczynnika rozszerzenia w oparciu o splot rozkładu prostokątnego z normalnym. PAK nr 4 (2004), s. 13-16.

[5] P. Fotowicz: An analytical method for calculating a coverage interval. Metrologia vol. 43 (2006), s. 42-45.

[6] P. Fotowicz: Metoda obliczania przedziału i współczynnika rozszerzenia przy opracowaniu wyniku pomiaru. Praca zbiorowa pt. "Niepewność pomiarów w teorii i praktyce", rozdział 3, s. 32-44. Wydawnictwo GUM 2011.

[7] Przewodnik wyznaczania niepewności pomiaru. JCGM 100.

[8] Przewodnik wyznaczania niepewności pomiaru. Suplement 1, JCGM 101.

[9] Wyznaczanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu. Dokument EA-4/02.